KAJIAN NUMERIK PENDUGA FUNGSI INTENSITAS BERBENTUK EKSPONENSIAL DARI FUNGSI PERIODIK DITAMBAH TREN LINEAR SUATU PROSES POISSON NONHOMOGEN

S. K. NASIB[1], I W. MANGKU[2], H. SUMARNO[2]

Abstrak

Pada karya ilmiah ini dilakukan kajian numerik untuk melihat perilaku penduga tipe kernel bagi komponen periodik dari fungsi intensitas yang berbentuk eksponensial dari fungsi periodik ditambah tren linear pada suatu proses Poisson nonhomogen. Penyusunan penduga tipe kernel tersebut hanya menggunakan realisasi tunggal dari proses Poisson yang diamati pada interval pengamatan [0,*n*]. Pada kajian ini dipilih fungsi kernel seragam untuk mengevaluasi sifat-sifat asimtotik penduga dengan tujuan menentukan *bandwidth* yang dapat meminimumkan MSE, menenukan nilai *n* yang menghasilkan MSE penduga kurang dari 0.05, serta memverifikasi kenormalan asimtotik penduga.

Kata Kunci : simulasi, kernel seragam, *bandwidth*, penduga tipe kernel, eksponensial

PENDAHULUAN

Misalkan N merupakan proses Poisson nonhomogen pada interval $[0,\infty)$ dengan fungsi intensitas λ tidak diketahui dan diasumsikan terintegralkan lokal. Dikaji kasus khusus, di mana fungsi intensitas ini merupakan eksponensial dari fungsi periodik ditambah tren linear, sehingga untuk sembarang titik $s \in [0,\infty)$, fungsi intensitas λ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\lambda(s) = exp(\lambda_c^*(s) + s), \qquad (1)$$

Di mana $\lambda_c^*(s)$ merupakan fungsi periodik yang tidak diketahui dengan periode τ diketahui. Persamaan (1) dapat juga dituliskan menjadi

$$\lambda(s) = \left(exp\left(\lambda_c^*(s)\right)\right)(exp(s)). \qquad (2)$$

Karena $exp\left(\lambda_c^*(s)\right)$ juga merupakan fungsi periodik dengan periode τ, misalkan $\lambda_c(s) = exp\left(\lambda_c^*(s)\right)$, maka persamaan (2) menjadi

$$\lambda(s) = \left(\lambda_c(s)\right)(exp(s)). \qquad (3)$$

Dari persamaan (3), karena s diketahui maka untuk menduga $\lambda(s)$ dapat disederhanakan dengan hanya menduga komponen periodik dari fungsi intensitas tersebut yaitu $\lambda_c(s)$. Karena $\lambda_c(s)$ merupakan fungsi periodik dengan periode $\tau > 0$, maka untuk menduga $\lambda_c(s)$ pada $s \in [0,\infty)$ cukup diduga $\lambda_c(s)$ pada

[1]Mahasiswa Program Pascasarjana, Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB Dramaga Bogor, 16680.

[2]Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

$s \in [0,\tau)$. Berdasarkan sifat keperiodikkan [1], untuk setiap titik $s \in [0,\infty)$ dan $k \in \mathbb{Z}$, di mana $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat, $\lambda_c(s)$ dapat dituliskan menjadi:

$$\lambda_c(s) = \lambda_c(s + k\tau). \tag{4}$$

Sebelum menyajikan hasil simulasi, terlebih dahulu direview penyusunan penduga konsisten beserta sifat-sifat statistika bagi $\lambda_c(s)$ pada $s \in [0,\tau)$ yang telah dikaji pada [3]. Dalam menduga fungsi tersebut digunakan metode penduga tipe kernel umum. Penyusunan penduga tersebut hanya menggunakan realisasi tunggal $N(\omega)$ dari proses Poisson dengan fungsi intensitas $\lambda(s)$ seperti pada persamaan (3) yang diamati pada interval $[0,n]$. Realisasi $N(\omega)$ tersebut terdefinisi dalam suatu ruang probabilitas$(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\mathcal{F}},\ \boldsymbol{P})$ dengan $\omega \in \boldsymbol{\Omega}$. Selanjutnya disajikan hasil simulasi untuk melihat perilaku penduga tipe kernel seragam dengan menggunakan panjang interval pengamatan yang terbatas.

REVIEW SIFAT-SIFAT STATISTIKA PENDUGA

Pendugaan terhadap suatu parameter tertentu dilakukan untuk memperoleh nilai taksiran atau hampiran berdasarkan sampel statistik, karena pada umumnya nilai parameter suatu distribusi tidak diketahui. Dalam karya ilmiah ini, dilakukan pendugaan terhadap fungsi intensitas suatu proses Poisson nonhomogen. Parameter yang tidak diketahui adalah komponen periodik yang didefinisikan pada persamaan (3), yaitu $\lambda_c(s)$ sehingga untuk menduga fungsi intensitas (s) cukup dengan hanya menduga komponen periodiknya. Dalam menduga fungsi periodik ini digunakan metode non-parametrik, yaitu metode penduga tipe kernel. Metode ini merupakan metode penduga yang tidak mengasumsikan bentuk apapun dari fungsi $\lambda_c(s)$ kecuali fungsi tersebut merupakan fungsi periodik. Metode penduga tipe kernel yang dipilih adalah kernel umum, di mana untuk sembarang kernel dapat digunakan.

Misalkan $K:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi kernel bernilai real [2]. Fungsi kernel tersebut memenuhi sifat-sifat (K1) K merupakan fungsi kepekatan peluang, (K2) K terbatas, dan (K3) K memiliki daerah definisi pada [-1,1]. Misalkan pula h_n adalah barisan bilangan real positif yang konvergen ke nol, yaitu

$$h_n \downarrow 0 \tag{5}$$

untuk $n \to \infty$. Rumusan penduga tipe kernel bagi $\lambda_c(s)$pada suatu titik $s \in [0,\tau)$ dengan menggunakan fungsi kernel K dapat disusun sebagai berikut

$$\hat{\lambda}_{c,n,K}(s) = \frac{\tau}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h_n \exp(s + k\tau)} \int_0^n K\left(\frac{x - (s + k\tau)}{h_n}\right) N(dx). \tag{6}$$

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan pada [3], diperoleh Lema 1, Lema 2, dan Teorema 1 sebagai berikut.

Lema 1 (Ketakbiasan Asimtotik) *Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan* (3) *dan terintegralkan lokal. Jika kernel K memenuhi sifat* (K1), (K2), (K3) *dan* $h_n \to 0$, *maka*

$$\boldsymbol{E}\hat{\lambda}_{c,n,K}(s) \to \lambda_c(s), \tag{7}$$

untuk $n \to \infty$, dengan syarat s adalah titik Lebesque dari λ_c. Dengan kata lain, $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ adalah penduga tak bias asimtotik bagi $\lambda_c(s)$.

Lema 2 (Kekonvergenan Ragam) *Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan* (3) *dan terintegralkan lokal. Jika kernel K memenuhi sifat* (K1), (K2), (K3), $\boldsymbol{h_n} \to \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\lambda_c}$ *terbatas di sekitar s , dan* $\boldsymbol{n^2 h_n} \to \infty$ *untuk* $\boldsymbol{n} \to \infty$, *maka*

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)\right) \to 0, \tag{8}$$

untuk $n \to \infty$.

Berdasarkan Lema 1 dan Lema 2 diperoleh Teorema berikut.

Teorema 1 (Kekonsistenan Penduga) *Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan* (3) *dan terintegralkan lokal. Jika kernel K memenuhi sifat* (K1), (K2), (K3), $\boldsymbol{h_n} \to \boldsymbol{0}$ *dan* $\boldsymbol{n^2 h_n} \to \infty$ *maka*

$$\hat{\lambda}_{c,n,K}(s) \xrightarrow{p} \lambda_c(s), \tag{9}$$

untuk $n \to \infty$, asalkan s adalah titik Lebesque dari λ. Dengan kata lain, $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ adalah penduga konsisten bagi $\lambda_c(s)$. Selain itu, Mean Squared Error (MSE) dari $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ konvergen ke 0, *untuk $n \to \infty$, yaitu*

$$MSE\,(\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)) \to 0. \tag{10}$$

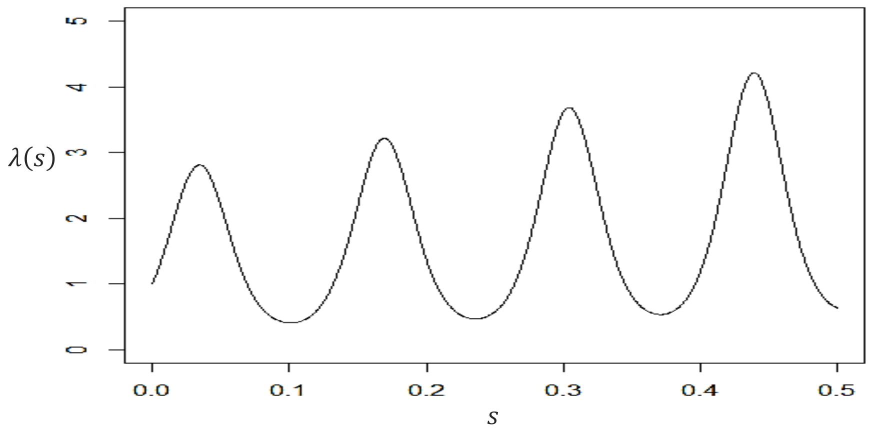
Pada [3] telah dirumuskan penduga bagi $\lambda_c(s)$ dinotasikan $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ yang dapat dilihat pada persamaan (6). Penduga yang baik apabila memenuhi sifat-sifat yaitu (i) tak bias, jika nilai harapan penduga sama dengan nilai yang diduga, (ii) efisien, jika penduga memiliki ragam yang kecil konvergen ke nol, (iii) konsisten, jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Oleh karenanya telah dilakukan pengkajian dan pembuktian bagi kekonsistenan penduga $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ sehingga penduga tersebut dikatakan baik. $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ memiliki sifat penduga yang termasuk ke dalam kategori sifat penduga asimtotik, yaitu sifat tersebut hanya dapat didekati ketika ukuran sampel semakin membesar.

Dalam [1], untuk mengkaji kekonsistenan $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ dibuktikan terlebih dahulu bahwa penduga tersebut memenuhi sifat ketakbiasan asimtotik dan kekonvergenan ragam menuju nol. Pada saat membuktikan penduga tersebut tak bias asimtotik yakni dengan menunjukkan bahwa limit dari nilai harapan penduga sama dengan parameter yang diduga, hal ini telah dikaji dan ditunjukkan dalam Lema 1 (ketakbiasan asimtotik). Sedangkan untuk menunjukkan penduga tersebut memiliki ragam yang konvergen ke nol, berarti menunjukkan bahwa penduga tersebut memiliki ragam terkecil menuju nol yang telah dikaji pada Lema 2 (kekonvergenan ragam). Selain kekonsistenan penduga yang diperlukan dalam menunjukkan bahwa penduga tersebut adalah penduga yang baik yakni penduga tersebut tak bias dan memiliki ragam terkecil secara bersamaan maka diperlukan *Mean Squared Error* (MSE) yang konvergen ke nol, hal ini telah dibuktikan dalam Teorema 1 (kekonsistenan penduga). Semakin kecil nilai MSE yang dihasilkan, maka semakin baik penduga tersebut. Oleh karenanya diperlukan asumsi $h_n \to 0$ dengan $n \to \infty$ pada Lema 1 (ketakbiasan asimtotik) untuk bisa menunjukkan penduga tersebut tak bias asimtotik dan $n^2 h_n \to \infty$ dengan $n \to \infty$ pada Lema 2 (kekonvergenan ragam) sehingga ragam penduga konvergen ke nol.

SIMULASI PENYUSUNAN PENDUGA

Pada simulasi penyusunan penduga bagi fungsi periodik dari fungsi intensitas suatu proses Poisson periodik ini dilakukan secara komputasi dengan bantuan perangkat lunak R. Data yang digunakan pada simulasi ini merupakan data bangkitan pada interval waktu pengamatan $[0, n]$ dengan n yang terbatas. Metode yang digunakan untuk membangkitkan realisasi dari proses Poisson periodik tersebut adalah metode Monte Carlo sebanyak 500 kali ulangan.Tujuan dari simulasi ini adalah menentukan *bandwidth* yang dapat meminimumkan MSE, menentukan nilai n yang cukup dapat menggambarkan sifat-sifat asimtotik dari $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ (dalam hal ini nilai n yang dapat menghasilkan MSE $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ yang kurang dari 0.05), dan memverifikasi kenormalan asimtotik penduga. Berdasarkan tujuan tersebut, simulasi dilakukan dalam tiga tahap yaitu

a) Menentukan *bandwidth* yang dapat meminimumkan MSE



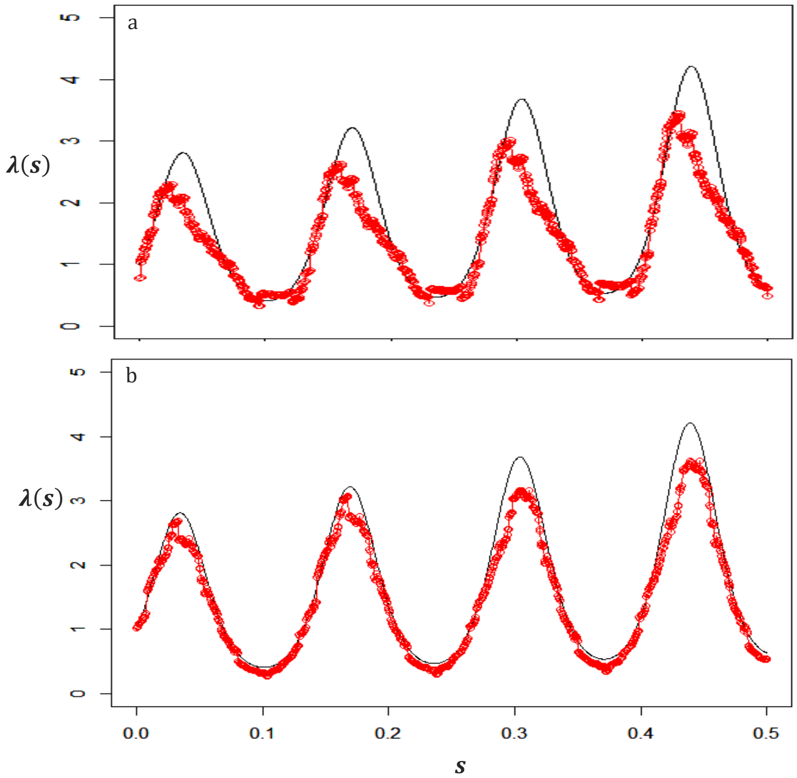
Gambar 1 Grafik fungsi $\lambda(s)$

b) Menentukan nilai n yang dapat menghasilkan $MSE\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ kurang dari 0.05 dengan menggunakan *bandwidth* yang telah diperoleh sebelumnya
c) Memverifikasi kenormalan asimtotik penduga.

Sebagai ilustrasi, maka fungsi intensitas yang digunakan dalam simulasi ini adalah

$$\lambda(s) = \left[\exp\left(\sin\left(\frac{2\pi s}{\tau}\right)\right)\right](exp(s)) \tag{11}$$

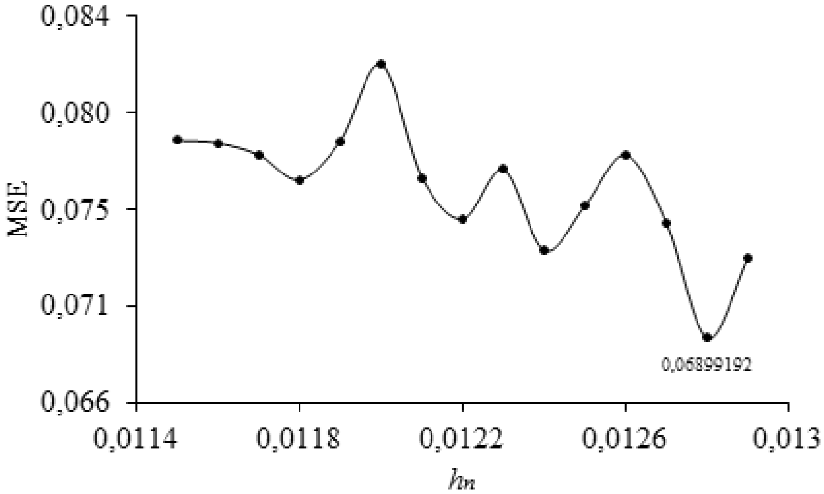
dengan $\exp\left(\sin\left(\frac{2\pi s}{\tau}\right)\right)$ merupakan komponen periodik dari $\lambda(s)$. Pada simulasi ini dipilih nilai $\tau = 0.135$ yang merupakan periode, sehingga grafik fungsi $\lambda(s)$ pada persamaan (11) ditampilkan dalam Gambar 1. Penduga bagi fungsi periodik dari fungsi intensitas yang digunakan adalah penduga yang telah didefinisikan pada persamaan (6). Karena fungsi kernel pada persamaan (6) merupakan kernel umum, maka pada simulasi ini dipilih fungsi kernel seragam yaitu dengan menganti $K(x) = \frac{1}{2}$ dengan $x \in [-1,1]$. Selanjutnya dapat dilihat ilustrasi grafik fungsi intensitas $\lambda(s)$ beserta nilai dugaannya dengan menggunakan *bandwidth* 0.0125 dengan realisasi pada interval waktu pengamatan [0,9] dan [0,13] yang ditampilkan pada Gambar 2a dan 2b.



Gambar 2 Grafik fungsi $\lambda(s)$ (—) beserta penduganya (**-o-**) pada interval pengamatan. (a) [0,9]; (b) [0,13]

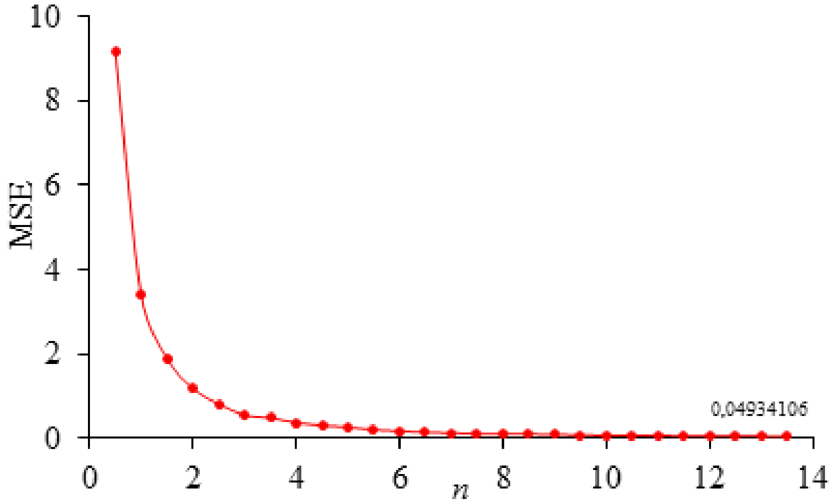
Berdasarkan ilustrasi grafik fungsi intensitas $\lambda(s)$ beserta nilai dugaannya pada Gambar 2a dan 2b, terlihat bahwa penduga bagi fungsi intensitas dengan menggunakan interval waktu pengamatan [0,13] jauh lebih baik dibandingkan dengan interval waktu pengamatan [0,9]. Hal ini dikarenakan penduga pada ilustrasi Gambar 2a masih jauh dengan fungsi intensitas sebenarnya dibandingkan dengan penduga pada Gambar 2b. Oleh sebab itu, untuk nilai *n* yang lebih besar, penduga yang dihasilkan akan lebih mendekati fungsi intensitas sebenarnya.

Selanjutnya untuk menunjukkan hasil yang maksimal dilakukan simulasi tahap pertama yaitu menentukan *bandwidth* yang dapat meminimumkan MSE. Pada tahapan ini, simulasi dilakukan dengan menganti-ganti nilai *bandwidth*. Penentuan *bandwidth* diambil secara sembarang sebanyak 15 yang berkisar antara 0.0115-0.0129 dengan panjang interval waktu [0,10]. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pada kisaran 0.0115-0.0129 diperoleh nilai MSE minimum yaitu 0.06899192 pada *bandwidth* 0.0128. Hasil simulasi tahap pertama ini ditampilkan dalam Gambar 3.



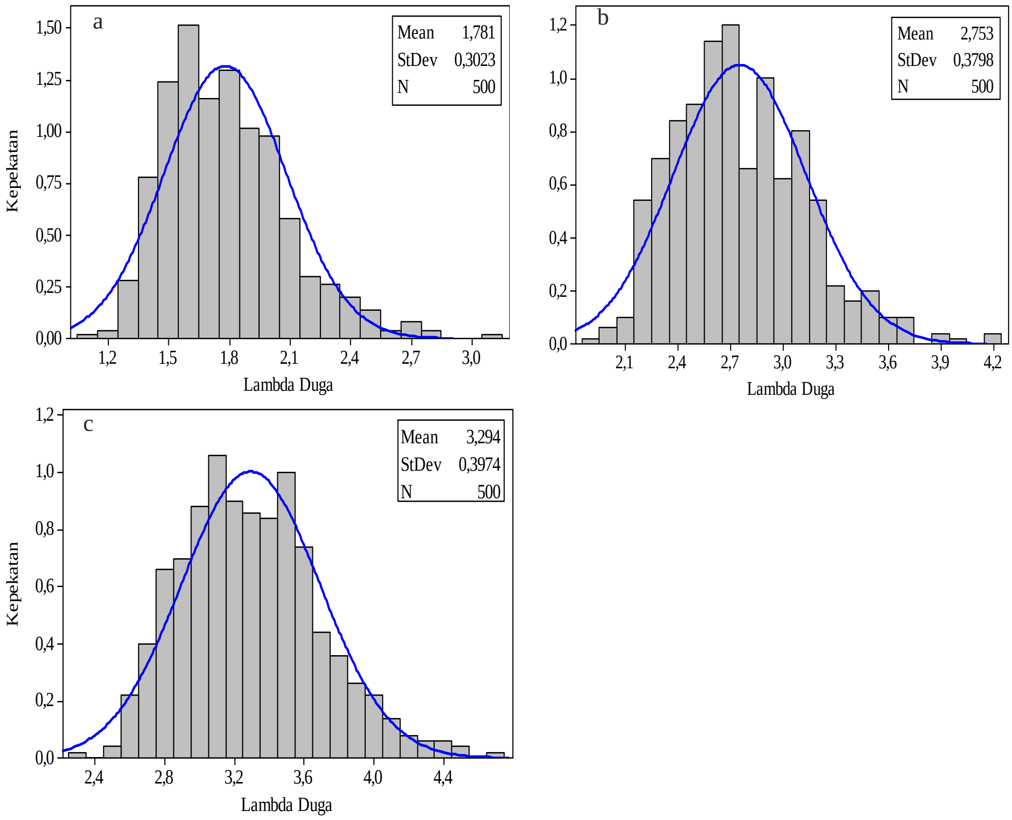
Gambar 3 Grafik *bandwith* yang meminimumkan MSE penduga fungsi intensitas $\lambda(s)$

Tahapan selanjutnya, dilakukan simulasi untuk menentukan nilai *n* yang cukup dapat menggambarkan sifat-sifat asimtotik penduga, yaitu nilai *n* yang menghasilkan MSE penduga kurang dari 0.05dengan menggunakan nilai *bandwidth* yang diperoleh dari simulasi tahap pertama yaitu 0.0128. Simulasi yang dilakukan sebanyak 26 kali dengan mengganti nilai *n* diperoleh MSE penduga yang kurang dari 0.05 yaitu 0,04934106 pada interval waktu pengamatan [0,13]. Dengan demikian, jika nilai *n* semakin diperbesar maka nilai MSE penduga semakin kecil. Berikut pengaruh nilai *n* terhadap MSE penduga ditunjukkan pada Gambar 4.



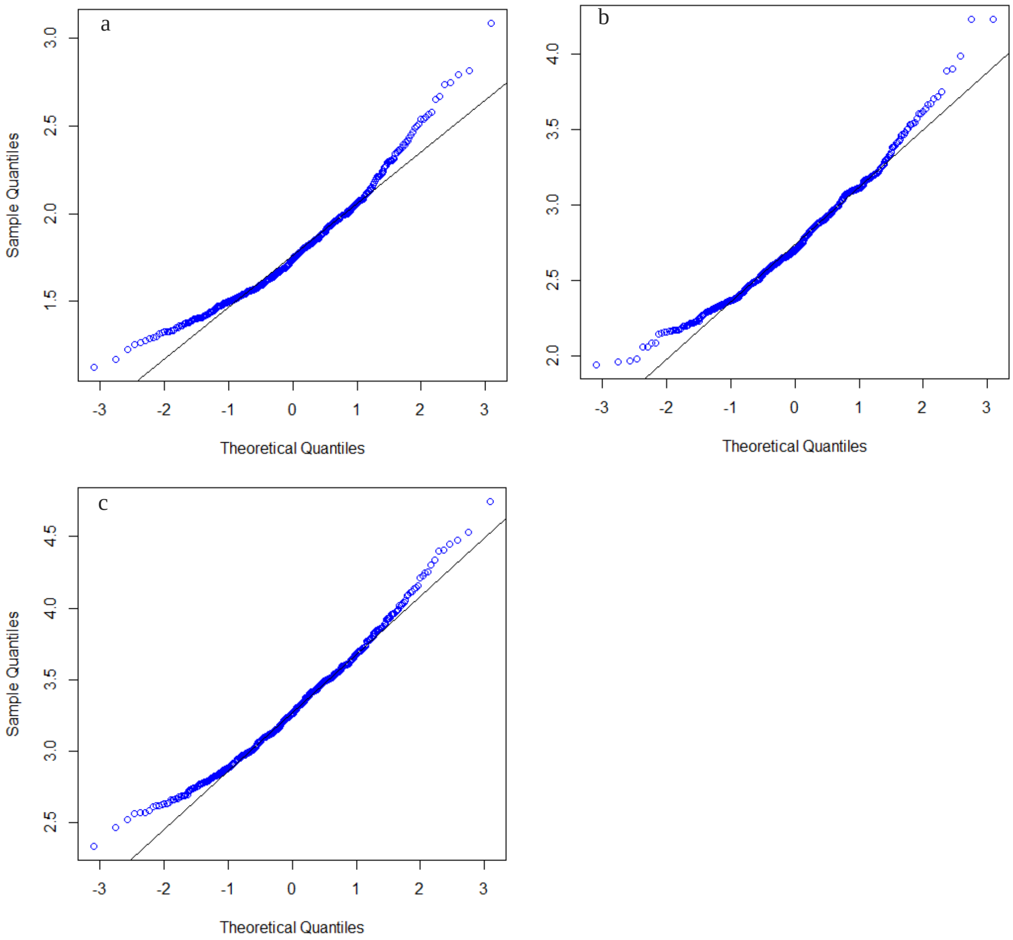
Gambar 4 Grafik MSE penduga fungsi intensitas $\lambda(s)$

Simulasi pada tahap ketiga ini bertujuan memverifikasi kenormalan asimtotik penduga. Maksud dari simulasi pada tahap ini, ingin mengetahui apakah distribusi dari penduga mengikuti atau mendekati distribusi normal, yakni distribusi dengan bentuk lonceng (bell shaped). Penduga yang baik adalah penduga yang mempunyai pola seperti distribusi normal, yaitu distribusi penduga tersebut tidak menceng kekiri atau kekanan.Untuk memverifikasi kenormalan asimtotik penduga dilakukan pendugaan fungsi intensitas disuatu titik dengan menggunakan 3 titik yang mewakili nilai$\lambda_c(s)$ kecil, sedang, dan besar. Titik yang digunakan yaitu $s = 0.412$ dengan $\lambda_c(s) = 1.377213$ mewakili $\lambda_c(s)$ yang kecil, $s = 0.425$ dengan $\lambda_c(s) = 2.230271$ mewakili $\lambda_c(s)$ yang sedang, dan $s = 0.439$ dengan $\lambda_c(s) = 2.718098$ mewakili $\lambda_c(s)$ yang besar. Simulasi dilakukan sebanyak 500 kali ulangan pada interval waktu pengamatan [0,10] dan *bandwidth* 0.0128. Selanjutnya 500 nilai dugaan yang diperoleh untuk masing-masing tiga titik tersebut, dianalisis menggunakan histogram untuk diperlihatkan bahwa nilai dugaan tersebut berdistribusi normal (Gambar 5).



Gambar 5 Histogram normalitas asimtotik nilai dugaan fungsi intensitas $\lambda(s)$. (a) titik s = 0.412; (b) titik s =0.425; (c) titik s = 0.439

Terlihat bahwa penduga bagi $\lambda(s)$ dapat dikatakan berdistribusi normal. Hal ini dikarenakan bahwa pada Gambar 5, distribusi nilai dugaan di setiap titik membentuk lonceng (bell shaped). Selanjutnya untuk lebih memperlihatkan kenormalan penduga, dilakukan simulasi dengan mengecek kenormalan di tiap titik menggunakan *built in function* qq-norm dan qq-line pada R. Hasil dari simulasi ini ditunjukkan pada Gambar 6. Pada grafik normalitas yang disajikan dalam Gambar 6, nilai dugaan bagi fungsi intensitas $\lambda(s)$ menyebar disekitar garis diagonal dan mengikuti arah garis diagonal. Dari grafik pula dapat dilihat bahwa ketika nilai dugaan semakin mendekati titik 0 maka semakin mendekati pula garis normal. Hal ini menunjukkan bahwa nilai dugaan tersebut mengikuti distribusi normal.



Gambar 6 Histogram normalitas asimtotik nilai dugaan fungsi intensitas $\lambda(s)$. (a) titik s = 0.412; (b) titik s = 0.425; (c) titik s = 0.439

SIMPULAN

Berdasarkan hasil kajian terhadap penduga bagi fungsi intensitas berbentuk eksponensial dari penjumlahan antara fungsi periodik dan tren linear suatu proses Poisson nonhomogen dengan menggunakan kernel umum, diperoleh rumusan penduga bagi $\lambda_c(s)$yaitu:

$$\hat{\lambda}_{c,n,K}(s) = \frac{\tau}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{h_n \exp(s+k\tau)}\int_0^n K\left(\frac{x-(s+k\tau)}{h_n}\right)N(dx).$$

Penduga $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ merupakan penduga yang tak bias asimtotik dan ragamnya konvergen ke nol untuk $n \to \infty$, sehingga penduga tersebut merupakan penduga yang konsisten.

Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan dengan menggunakan fungsi kernel seragam dan data bangkitan, diperoleh bahwa perilaku penduga dipengaruhi oleh pilihan *bandwidth* yang meminimumkan MSE. Pada simulasi ini, *bandwidth* yang meminimumkan nilai MSE adalah 0.0128. Dengan menggunakan *bandwidth* tersebut, diperoleh nilai $n = 13$ yang menghasilkan MSE $\hat{\lambda}_{c,n,K}(s)$ kurang dari 0.05 dengan $\tau = 0.135$. Artinya jika n merupakan panjang interval suatu waktu, dimisalkan n dalam ukuran hari dan τ merupakan periode terjadinya proses Poisson dalam kurun waktu satu hari, maka untuk menduga fungsi intensitas dengan tren ini diperlukan data selama $\frac{n}{\tau}$ yaitu 96.296 hari atau sekitar 3 bulan. Oleh karenanya, untuk menghasilkan MSE penduga yang semakin kecil maka interval pengamatan $[0, n]$ semakin diperbesar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Mangku IW. 2001. Estimating the Intensity of a Cyclic Poisson Process (Ph.D.Thesis). *University of Amsterdam.*

[2] Helmers R, Mangku IW, Zitikis R. 2003. Consistent estimation of the intensity function of a cyclic Poisson process. *Journal of Multivariate Analysis*. 84:19-39.

[3] Nasib SK, Mangku IW, Sumarno H. 2014. Estimating the intensity obtained as exponential of a periodic function plus linear trend of a nonhomogeneous Poisson process, submitted for publication.